

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2014/2015**  
**AM210 - Analisi Matematica 3 - Tutorato III**

DOCENTE: PROF. GIOVANNI MANCINI

TUTORI: A. MAZZOCOLI, M. NANNI

Si possono verificare gli esercizi consultando le soluzioni ai tutorati I e VI dell'A.A. 2013/2014.

ESERCIZIO 1. Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a < b$ . Provare che

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| := \int_a^b |f(x)| dx$$

definisce una norma sullo spazio  $X = C([a, b], \mathbb{R})$  delle funzioni continue su  $[a, b]$ , ma che la stessa non è una norma sullo spazio  $Y = \text{Ri}([a, b], \mathbb{R})$  delle funzioni integrabili secondo Riemann su  $[a, b]$ .

ESERCIZIO 2. Dire se le seguenti sono delle norme in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\circ |z| + \max(|x|, |y|) \quad \circ \left( \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \right)^2 + |z| \quad \circ \max(|x| + |z|, |y|) \quad \circ |x|^2 + |y| + |z|$$

ESERCIZIO 3. Sia  $X$  lo spazio delle successioni reali.

Provare che  $\forall x \in X, 1 \leq p \leq q \leq \infty$ , si ha che  $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ .

Dedurre che  $l^p \subseteq l^q \quad \forall 1 \leq p \leq q \leq \infty$ .

ESERCIZIO 4. Sia  $x_n(k) = \frac{e^{-k/n}}{n}, k \in \mathbb{N}$ .

Calcolare  $\|x\|_1, \|x\|_2$ . Studiare la convergenza di  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $l^1, l^2$  e dedurre che le norme  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  non sono equivalenti.

ESERCIZIO 5. Sia  $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di successioni definita come:

$$x_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$$

(a) Provare che  $x_n \in l^p \quad \forall 1 \leq p \leq \infty, \forall n \in \mathbb{N}$ .

(b) Provare che  $\{x_n\}$  è una successione limitata in  $l^p \quad \forall 1 \leq p \leq \infty$ , cioè

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_p < \infty \quad \forall 1 \leq p \leq \infty$$

(c) Provare che  $\{x_n\}$  non ha sottosuccessioni convergenti in  $l^p$  per alcun  $1 \leq p \leq \infty$ .

ESERCIZIO 6. Provare che  $x_n(k) = \frac{1}{k} \sqrt{2 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{kn}}\right)} \notin l^1$ .

ESERCIZIO 7. Calcolare

$$\int_1^{+\infty} \left(x + \frac{2}{t}\right) \frac{e^{-tx}}{t^2} dt, \quad x \geq 0.$$